

4. Hausübung zur Theoretischen Physik für Lehramt, WS 2010/11

(abzugeben am Freitag, 19.11.2010)

Aufgabe H07 Exponentialfunktion einer Matrix (5 Punkte)

Auch für Matrizen definiert man $\exp M = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M^n$.

- (a) M sei eine konstante Matrix. Zeigen Sie, dass die Lösung der Differentialgleichung $\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = iM\vec{x}(t)$ gegeben ist durch $\vec{x}(t) = \exp(itM)\vec{x}(0)$.
- (b) M sei eine spurlose imaginäre 2×2 Matrix und deshalb eine Linearkombination von

$$M_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche der M_i sind hermitesch, welche antihermitesch?

Berechnen Sie $U_i = \exp(itM_i)$; welche der U_i sind unitär?

Verifizieren Sie für die drei Fälle die Beziehung $\det(\exp A) = \exp(\text{tr}A)$.

Aufgabe H08 Aufspaltung eines Atomstrahls (5 Punkte)

Jemand experimentiert mit einem Strahl von Helium-Atomen im angeregten 3S_1 Triplett-Zustand (Elektron-Konfiguration $1s2s$, Kernspin 0). Die Atome werden demnach durch Zustandsvektoren in \mathbb{C}^3 charakterisiert. In einer geeigneten Basis wird die benutzte Stern-Gerlach-Messapparatur durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Sie spaltet den Atomstrahl (im Zustand $|\psi\rangle$) auf in drei Teile, deren Atome sich dann jeweils in den Eigenzuständen

$$|\rightarrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\circ\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\leftarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

befinden. Die drei Teilstrahlen passieren unmittelbar darauf eine zweite, identische Messapparatur, welche gegenüber der ersten um 90° gedreht ist. Diese Drehung ist in \mathbb{C}^3 realisiert durch die Matrix

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix},$$

so dass der zweite Satz von Eigenzuständen lautet

$$|\uparrow\rangle = \mathcal{R} |\rightarrow\rangle, \quad |\bullet\rangle = \mathcal{R} |\circ\rangle, \quad |\downarrow\rangle = \mathcal{R} |\leftarrow\rangle.$$

Bestimmen Sie die Intensitäten $W_{\alpha i}$ mit $i = \rightarrow, \circ, \leftarrow$ und $\alpha = \uparrow, \bullet, \downarrow$ der neun Teilstrahlen nach der zweiten Aufspaltung. Hat einer der Teilstrahlen Intensität Null? Wie groß ist die Gesamtintensität?